$\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ et les quaternions

Geoffrey Deperle

Leçons associées :
- 103 : Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients.
- 108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.
- 160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).
- 161 : Distances dans un espace affine euclidien. Isométries.
- 191 : Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie.

Le but de ce développement est de montrer le théorème suivant :

Théorème. *Soit $H = \{a + ib + jc + kd, (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4\}$ l'algèbre des quaternions sur $\mathbb{R}$. On identifie H avec $\mathbb{R}^4$ muni de la topologie euclidienne.*
En notant G le sous-groupe de H^* formé des quaternions de norme 1. On a la suite exacte :

$$1 \to \{\pm 1\} \to G \to \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \to 1$$

Preuve :

Étape 1 : Construisons un morphisme $\tilde{S} : G \to \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$

Considérons la conjugaison pour $q \in G$:

$$\begin{array}{rcccc} S_q & : & H & \to & H \\ & & x & \mapsto & qxq^{-1} = qx\overline{q} \end{array}$$

S_q est une bijection d'inverse $S_{q^{-1}}$. Considérons alors la représentation :

$$\begin{array}{rcccc} S & : & G & \to & \mathrm{GL}(\mathbb{R}^4) \simeq \mathrm{GL}_4(\mathbb{R}) \\ & & q & \mapsto & S_q \end{array}$$

Cette application est bien définie car S est un morphisme de groupe et pour tout $q \in G$, S_q est linéaire.

De plus, en notant $||.||$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^4$, pour tout $q \in G$,

$$\begin{aligned} ||S_q(x)|| &= ||qxq^{-1}|| \\ &= ||q||||x||||q^{-1}|| \\ &= ||x|| \text{ car } q \in G \end{aligned}$$

donc on a $S : G \to \mathrm{O}(H)$.

Soit $\mathrm{N} = \{bi + cj + dk, (b, c, d) \in \mathbb{R}^3\}$ l'espace des quaternions purs, on a $\mathrm{N} = (\mathbb{R}.1)^\perp$ l'orthogonal de $\mathbb{R}.1$ dans H.
De plus, pour tout $q \in G, x \in \mathbb{R}, S_q(x) = x$ car $\mathbb{R}$ est central donc $\mathbb{R}.1$ est stable par S_q.
Comme $S_q \in \mathrm{O}(H)$, N est stable par S_q.
Notons $\tilde{S}_q = S_{q_{|\mathrm{N}}}$, on a $\tilde{S}_q \in \mathrm{O}(N) \simeq \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ et notons

$$\begin{array}{rccc} \tilde{S} & : & G & \to & \mathrm{O}_3(\mathbb{R}) \\ & & q & \mapsto & \tilde{S}_{q_{|\mathrm{N}}} \end{array}$$

le morphisme associé.

Étape 2 : Calculons $\mathrm{Ker}\tilde{S}$

Soit $q \in G$,

$$\begin{aligned} q \in \mathrm{Ker}\tilde{S} &\iff q \in G \cap Z(\mathrm{N}) \\ &\iff q \in G \cap \mathbb{R} \\ &\iff q \in \{\pm 1\} \end{aligned}$$

Étape 3 : Montrons que $\mathrm{Im}\tilde{S} \subset \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$

Les coefficients de $\tilde{S}_q$ sont polynomiales en les coordonnées de q donc $\tilde{S}$ est continue.
Comme $\det : \mathrm{O}_3(\mathbb{R}) \to \{\pm 1\}$ est continue, alors $\det \circ \tilde{S}$ est continue.
De plus, $G \simeq \mathbb{S}^3$ est connexe, on a donc $(\det \circ \tilde{S})(G) \subset \{1\}$ ou $(\det \circ \tilde{S})(G) \subset \{-1\}$.
Or, $\det(\tilde{S}_1) = \det(\mathrm{id}) = 1$ donc on a $\tilde{S}(G) \subset \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Étape 4 : Montrons que $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Im}\tilde{s}$

Comme $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements, il suffit de montrer que ceux-ci sont atteints.
Soit $p \in N \cap G$, $\tilde{S}_p(p) = pp\overline{p} = p$ donc $\tilde{S}_p$ fixe p.
De plus, comme $p \in G$, $\overline{p} = -p$ donc $\tilde{S}_p^{\ 2} = \tilde{S}_{p^2} = \tilde{S}_{-1} = \mathrm{id}$ donc $\tilde{S}_p$ est une involution : c'est un retournement d'axe $\mathrm{Vect}(p)$.
Comme ceci est vrai pour tout $p \in G \cap N \simeq \mathbb{S}^2$, tous les renversements de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ sont atteints.

Conclusion

Par théorème d'isomorphisme, on dispose de la factorisation suivante

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \arrow[r, "\tilde{S}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \\ G/\{\pm 1\} \arrow[ur, "\simeq"'] & \end{tikzcd}$$

d'où $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \simeq G/\{\pm 1\}$ $\square$

Application.

$$\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})/\{\pm I_2\} \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$$

Preuve : Comme $\mathbb{C} \subset H$, une base de H comme $\mathbb{C}-$espace vectoriel est donnée par $(1, j)$: un quaternion $q = a + ib + jc + dk$ peut être écrit comme $q = (a + ib) + j(x - ik)$.
On considère l'action de G sur H par multiplication à gauche :

$$q.x := T_q(x) = qx$$

donc le morphisme de groupe $G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ à valeurs dans $\mathrm{U}_2(\mathbb{C})$ car q est de norme 1.
Si $q = \lambda + j\mu \in H$, on a $T_q = \begin{pmatrix} \lambda & -\overline{\mu} \\ \mu & \overline{\lambda} \end{pmatrix} \in \mathrm{U}_2(\mathbb{C})$. Or, $1 = ||q|| = |\lambda|^2 + |\mu|^2 = \det(T_q)$ donc $T_q \in \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$.
Donc $G \simeq \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ (l'application est alors injective et surjective)

$\square$

Références

[1] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre*. Ellipses, 1996.